Wie verbessere ich meine Gewinnerwartung?

Wolfgang Wertz

1 Motivation: ein einfaches Spiel

Ein Spieler setzt den Einsatz e und erhält $2e$, wenn eine geworfene Münze „Kopf“ zeigt, und er verliert seinen Einsatz, wenn „Wappen“ geworfen wird. Nach jedem Verlust setzt er den doppelten Einsatz wie beim vorhergegangenen Spiel, gewinnt er hingegen, so bricht er das Spiel ab. Welchen Gewinn erzielt er mit dieser Strategie? (Martingal- oder Verdoppelungsstrategie; altprovencalisch: „Jouga a la martegalo“ - dahinter steht die Idee, durch fortschreitende Einsatzerhöhung einen Gewinn sicherzustellen).[1]

Da die Spieldauer nicht beschränkt ist, bietet sich als Modell

$$\Omega = \{\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n, \dots) : x_i \in \{0,1\}\} \tag{1}$$

an mit folgender Interpretation: $x_i = 1$, falls beim i-ten Spiel Kopf und $= 0$, falls beim i-ten Spiel Wappen kommt. Das Ereignis A_n: „Spielabbruch beim n-ten Spiel“ hat daher folgende Gestalt:

$$A_n = \{\mathfrak{x} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)-mal}, 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots) : x_{n+i} \in \{0,1\} \quad \forall i \geq 1\}. \tag{2}$$

Dem Modell liegt also eine *unendliche* Folge von Spielen zugrunde, von denen natürlich nur die ersten n tatsächlich gespielt werden und der Rest als fiktiv angenommen werden kann. Es gilt: $W(A_n) = 2^{-n}$. [2]

[1]Glücksspiele sind seit je an der Wiege der Wahrscheinlichkeitstheorie gestanden: Bischof Vibold von Cambrais berechnete im Jahre 960 die Anzahl der Ausgänge beim Werfen mit drei Würfeln – allerdings war seine Lösung falsch; eine richtige Lösung findet sich beim Troubadour Richard de Fournivals (etwa 1200–1250) in seiner Dichtung „De vetula“. - Erst dekadente Gesellschaften unterwerfen die Wissenschaft wirtschaftlicher Gewinnmaximierung.

[2]Dies bedarf freilich einer näheren Begründung, die sich aus der Theorie der unendlichen Produkträume ergibt, welche in den meisten neueren Büchern über Wahrscheinlichkeitstheorie zu finden ist.

Zur Berechnung des Erwartungswertes des Gewinnes ist es zweckmäßig, einen weiteren Wahrscheinlichkeitsraum zu benützen: $\Omega' := \mathbb{N}$; ist n der Zeitpunkt des letzten Spieles, so sei

$$W'(\{n\}) := W(A_n) = 2^{-n}.$$

Die Zufallsgröße $X : \Omega' \to \mathbb{R}$ beschreibe den Gewinn des Spielers. Weil er bei der Verdoppelungsstrategie beim k-ten Spiel den Einsatz $2^{k-1} \cdot e$ leistet, bei den ersten $n-1$ Spielen diese Einsätze verlorengehen, und er zuletzt $2^{n-1} \cdot e$ gewinnt, gilt

$$X(n) = -e \cdot \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + e \cdot 2^{n-1} = -e \cdot (2^{n-1} - 1) + e \cdot 2^{n-1} = e,$$

d.h. der Gewinn X ist konstant e und somit folgt auch $\mathbb{E}(X) = e$.

Die Voraussetzungen für das obige Spiel sind aus zwei Gründen unrealistisch:

1. Niemand kann beliebig oft spielen.

2. Das Spielkapital ist begrenzt, und es besteht gewöhnlich eine feste Einsatzbeschränkung, wie in Spielcasinos.

Ändern sich die Voraussetzungen also dahingehend, daß e_0 der maximal mögliche Einsatz pro Spiel ist ($e_0 \geq e$), so läßt sich die Verdoppelungsstrategie höchstens N-mal durchhalten, wobei N die größte natürliche Zahl mit $2^{N-1} \cdot e \leq e_0$ ist, also $N = [1 + {}^2\log(e_0/e)]$. Es kommt hier also auf das gleiche heraus, ob die Spieldauer oder der Einsatz begrenzt ist.

Anstelle von (1) eignet sich hier ein Laplaceraum (der Ordnung 2^N) über der Menge

$$\Omega_N = \{\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_N) : x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, N\} \qquad (3)$$

als Modell. A_n wird analog zu (2) definiert:

$$A_n = \{\mathfrak{x} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-1)-mal}, 1, x_{n+1}, \ldots, x_N) : x_{n+i} \in \{0,1\} \quad \forall i = 1, \ldots, N-n\}, \qquad (4)$$

und es folgt wieder $W(A_n) = 2^{-n}$. Der Gewinn des Spielers ist jetzt

$$X(\mathfrak{x}) = \begin{cases} e & \text{falls } \mathfrak{x} \in A := \bigcup_{n=1}^{N} A_n \\ -e \cdot (2^N - 1) & \text{falls } \mathfrak{x} \in A^c = \{(0, \dots, 0)\}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet A^c die Komplementärmenge von A. Weil offensichtlich $W(A^c) = 2^{-N}$ und daher $W(A) = 1 - 2^{-N}$ gilt, folgt:

$$\mathbb{E}(X) = e \cdot W(A) - e \cdot (2^N - 1) \cdot W(A^c) = e \cdot \Big[(1 - 2^{-N}) - (2^N - 1) \cdot 2^{-N}\Big] = 0,$$

das heißt, für dieses Spiel beträgt die Gewinnerwartung nur 0.

Jedes Einzelspiel ist *fair*, denn die Gewinnerwartung pro Münzwurf ist 0. Mit der Verdoppelungsstrategie läßt sich also die Gewinnerwartung für den Spieler verbessern, aber nur, wenn Spielkapital und Spiellänge unbegrenzt bleiben. *Es mag der Eindruck entstehen, daß dafür die sehr speziellen Spielregeln eine entscheidende Rolle spielen; in der Folge wird sich aber zeigen, daß dahinter ein recht allgemeingültiger Sachverhalt steht.*

Beim ersten Spiel erhebt sich die Frage nach der Wartezeit T bis zum Abbruch des Spieles:

$$T(\mathfrak{x}) = \begin{cases} \infty & \text{falls } x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \min\{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\} & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{5}$$

ist also eine Zufallsgröße $T : \Omega \to \mathbb{N}_\infty := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ihre Verteilung ist durch

$$W([T = n]) \ = 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gegeben. T ist also *fast sicher* (d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1) *endlich*, aber *nicht beschränkt.* Für den Erwartungswert gilt:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-n} = 2\,,$$

was sich durch einfache Rechnung ergibt.

2 Irrfahrten

Es sei $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, reellwertiger Zufallsgrößen (ZGen), die alle die gleiche Verteilung haben, die integrierbar und die nicht fast sicher (f.s.) konstant sind [3] mit $\eta := \mathbb{E}(Y_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, ferner

$$X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

der Summenprozeß; dann heißt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Irrfahrt* (auf $\mathbb{R}$).

Beispiel 2.1 *Wie in Kap. 1 wird eine Münze geworfen, nur setzt der Spieler immer den gleichen Einsatz 1. Es bezeichne*

$$Y_k := \begin{cases} 1 & \textit{falls Kopf kommt} \\ -1 & \textit{falls Wappen kommt.} \end{cases}$$

X_n ist dann der Gesamtgewinn zum Zeitpunkt n.

Ohne auf die teilweise schwierigen technischen Einzelheiten einzugehen, führe ich einige bemerkenswerte Ergebnisse an:

Satz 2.1 *Unter den gegebenen Voraussetzungen sind folgende Bedingungen äquivalent:*

$$\eta = 0 \tag{7}$$

$$\forall \epsilon > 0 \textit{ gilt: } |X_n| < \epsilon \textit{ für } \infty \textit{ viele } n \quad \textit{f.s.} \tag{8}$$

$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n = \infty \quad \textit{f.s.} \tag{9}$$

Bezeichnet also wieder Y_k den beim k-ten Spiel erzielten Gewinn, so ist das Spiel genau dann fair, das heißt, es gilt (7), wenn X_n immer wieder beliebig nahe an 0 herankommt (8) - im Falle von Beispiel 2.1 also 0 erreicht - aber auch, wenn sowohl der Gesamtgewinn als auch der Gesamtverlust beliebig oft beliebig groß werden (9). Sogar bei einem fairen Spiel lassen sich also beliebig große Gewinne erzielen, die Frage ist nur, *wann* sie auftreten!

Für den Fall des Beispiels 2.1 leite ich in Kap. 6 die Verteilung der Wartezeit T bis zum ersten Gewinn her; dabei zeigt sich, daß bereits dieses einfache Beispiel einiges an Hilfsmitteln erfordert.

[3] Für f.s. konstante ZGen lassen sich entsprechende Aussagen angeben, die sich aber als trivial erweisen.

Für die obige Folge (6) gilt:
Es sei

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n > 0\}, \tag{10}$$

im Falle von Beispiel 2.1 (X_n nimmt nur ganzzahlige Werte an!) also:

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 1\}. \tag{11}$$

Wegen (9) ist T f.s. endlich, es gilt aber

$$\mathbb{E}(T) = \infty. \tag{12}$$

Obwohl das Spiel mit W. $\frac{1}{2}$ bereits beim ersten Spiel im Gewinn ist:

$$W([T = 1]) = 1/2,$$

weist (12) auf eine zu erwartende lange Wartezeit hin. (12) läßt sich mit martingaltheoretischen Methoden leicht beweisen; darauf gehe ich in Kap.6 noch ein. Eine Erklärung für diese paradoxe Erscheinung bietet das sogenannte *Arcus-Sinus-Gesetz*:

Satz 2.2 *Unter den gegebenen Voraussetzungen und zusätzlich*

$$\mathbb{E}(Y_k^2) < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

bezeichne R_n die relative Häufigkeit derjenigen Zeitpunkte, zu denen sich der Spieler bei n Spielen in der Gewinnzone befindet:

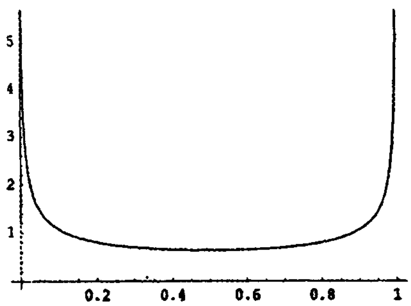
$$R_n := \frac{1}{n} \cdot \#\{k : 1 \leq k \leq n, X_k > 0\}. \tag{13}$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} W([R_n \leq t]) \;=\; F(t) \;:=\; \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin\sqrt{t} \;\; \forall t \in [0,1]. \tag{14}$$

F besitzt die W.-Dichte

$$t \mapsto f(t) \;=\; (\pi\sqrt{t(1-t)})^{-1} \quad t \in (0,1) \tag{15}$$



Wie die Abbildung zeigt, ist f in $(0,1)$ U-förmig und strebt an den Intervallenden gegen Unendlich. Daher sind sehr lange Glücks- und Pechsträhnen (d.h. große bzw. kleine Werte von R_n) viel wahrscheinlicher, als ein ausgeglichener Gewinnverlauf. Die in diesem Abschnitt geschilderten Sachverhalte erweisen sich insgesamt als noch überraschender als die im ersten Abschnitt!

3 Bedingte Erwartungen

In den Lehrplänen und Lehrbüchern für die höheren Schulen werden die grundlegenden Begriffe der *bedingten Wahrscheinlichkeit* und der *bedingten Erwartung* nur sehr oberflächlich bzw. gar nicht behandelt, obgleich ohne sie Regression, Abhängigkeiten, stochastische Prozesse u.v.a. mehr unverständlich bleiben. Daher fasse ich die wichtigsten Eigenschaften kurz zusammen und verweise im übrigen auf das Schrifttum: mathematisch korrekte, aber anspruchsvolle Darstellungen, die tragfähige Begriffe liefern, finden sich z.B. bei Bauer [2], Gänssler-Stute [7] oder Schürger [15] [4], didaktisch ansprechend gestaltete Einführungen, die jedoch Kompromisse eingehen, geben z.B. Foata-Fuchs [5], Gut [6] oder Ross [13].

Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, W)$ ein W.-Raum (siehe auch Reichel-Hanisch-Müller [11]), dann heißt

$$W^B(A) := W(A|B) := \frac{W(A \cap B)}{W(B)} \quad \forall A, B \in \mathfrak{A} \; mit \; W(B) > 0 \tag{16}$$

die *bedingte W. von A unter B* (oder: *gegeben B*, oder: *unter der Bedingung B)*. Für jedes festgehaltene B ist W^B ein W.-Maß. Ist X eine reelle ZG, so sei

$$\mathbb{E}(X|B) := \mathbb{E}^B(X), \tag{17}$$

wobei $\mathbb{E}^B(X)$[5] den mit dem W.-Maß W^B gebildeten Erwartungswert von X bezeichnet (soferne er existiert)[6]. $\mathbb{E}(X|B)$ heißt der *bedingte Erwartungswert von X unter B.*

[4]Die W.-Theorie kommt heute ohne umfangreichen maßtheoretischen Apparat nicht aus; der „klassische", „elementare" oder wie auch immer genannte Zugang verstellt mit Fallunterscheidungen den Blick auf das Wesentliche und stößt bei nichttrivialen Problemen schnell an seine Grenzen. Dies zeigen auch die folgenden Ausführungen.

[5]Diese Definition liefert zunächst nur den engeren Begriff einer regulären bedingten Erwartung, welcher aber für unsere Zwecke ausreicht.

[6]Technische Einzelheiten wie Existenzfragen von Erwartungswerten u. dgl. lasse ich künftig beiseite; die dadurch bedingte unbefriedigende Darstellung ist angesichts der gebotenen Kürze unvermeidlich.

Sind $Z, Z_1, \dots, Z_n$ diskret verteilte ZGen, so ergibt (17):

$$\mathbb{E}(Z|Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) := \sum_z z \cdot W([Z = z|Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n]), \tag{18}$$

wobei über die (höchstens abzählbar unendlich vielen) Werte z zu summieren ist, welche Z annehmen kann. (18) ist nur dann brauchbar, wenn

$$B := [Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n]$$

positive W. hat (d.h. $W(B) > 0$).

Besitzen $Z, Z_1, \dots, Z_n$ jedoch eine gemeinsame, $(n+1)$–dimensionale Dichte f (liegt also der stetige Fall vor), so definiert man:

$$f(z|z_1, \dots, z_n) := \frac{f(z, z_1, \dots, z_n)}{\underbrace{\int \cdots \int}_{n-mal} f(z, z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n}; \tag{19}$$

$z \mapsto f(z|z_1, \dots, z_n)$ heißt die durch $[Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n]$ *bedingte Dichte von* Z; ferner

$$\mathbb{E}(Z|Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) := \int f(z|z_1, \dots, z_n) dz. \tag{20}$$

In beiden Fällen (18) und (20) ist also der *bedingte Erwartungswert von* Z *unter* $[Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n]$ eine Funktion von $(z_1, \dots, z_n)$:

$$\mathbb{E}(Z|Z_1 = z_1, \dots, Z_n = z_n) = \phi(z_1, \dots, z_n). \tag{21}$$

Einsetzen von $Z_1, \dots, Z_n$ für $z_1, \dots, z_n$ in (21) ergibt die Definition des *bedingten Erwartungswertes von* Z *unter* $Z_1, \dots, Z_n$ [7]:

$$\mathbb{E}(Z|Z_1, \dots, Z_n) := \phi(Z_1, \dots, Z_n). \tag{22}$$

Bedingte Erwartungswerte haben Eigenschaften, die denen der Erwartungswerte ähnlich sind, etwa die Linearität, Positivität, Monotonie, Daniell-Stetigkeit. Zum Beispiel gilt:

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y|Z_1, \dots, Z_n) = \alpha\, \mathbb{E}(X|Z_1, \dots, Z_n) + \beta\, \mathbb{E}(X|Z_1, \dots, Z_n) \ f.s. \tag{23}$$

[7] Die kürzere Bezeichnung „bedingte Erwartung“ ist gebräuchlich.

Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die bedingten Erwartungswerte *Funktionen* sind, und daß die Aussagen nur fast sicher gelten. Drei wichtige Gleichungen spielen in der Folge eine Rolle:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Z \cdot g(Z_1, \dots, Z_n)|Z_1, \dots, Z_n) = \\ = \quad &g(Z_1, \dots, Z_n) \cdot \mathbb{E}(Z|Z_1, \dots, Z_n) \quad f.s. \end{aligned} \tag{24}$$

und, falls Z von $(Z_1, \dots, Z_n)$ unabhängig ist:

$$\mathbb{E}(Z|Z_1, \dots, Z_n) = \mathbb{E}(Z) \quad f.s. \tag{25}$$

Sind $(Y_1, \dots, Y_m)$ weitere ZGen, und gilt mit einer geeigneten Funktion

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$(Z_1, \dots, Z_n) = g(Y_1, \dots, Y_m)$, so folgt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|Z_1, \dots, Z_n)|Y_1, \dots, Y_m\big) = \\ = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z|Y_1, \dots, Y_m)&|Z_1, \dots, Z_n\big) = \mathbb{E}(Z|Z_1, \dots, Z_n) \quad f.s. \end{aligned} \tag{26}$$

(26) läßt sich mittels bedingter Erwartungswerte bezüglich σ -Algebren einfacher und viel allgemeiner ausdrücken, siehe z.B. [2] oder [15].

4 Martingale

Beispiel 4.1 *Für die Irrfahrt (6) gilt folgende Beziehung:*

$$Y_n = \begin{cases} X_1 & \text{für } n = 1 \\ X_n - X_{n-1} & \text{für } n > 1. \end{cases} \tag{27}$$

Dabei ist also $(X_1, \dots, X_n)$ eine Funktion von $(Y_1, \dots, Y_n)$, aber auch umgekehrt. Zweimalige Anwendung der Formel (26) ergibt:

$$\mathbb{E}(Y_k|X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Y_k|Y_1, \dots, Y_n) \quad f.s. \quad \forall\, k. \tag{28}$$

Dies führt auf

$$\mathbb{E}(Y_k|X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Y_k|Y_1, \dots, Y_n) = Y_k \quad f.s. \quad \forall\, k \leq n$$

und

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}) = \eta \quad f.s. \tag{29}$$

Die Addition dieser Gleichungen und (23) führen auf [8]

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n+1} Y_k | X_1, \ldots, X_n) = \sum_{k=1}^{n} Y_k + \mathbb{E}(Y_{n+1}) \quad f.s.,$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}(X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) = X_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}) \quad f.s. \tag{30}$$

und daher ist

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} X_n, \text{ je nachdem, ob } \mathbb{E}(Y_{n+1}) \left\{ \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} 0 \text{ ist.} \tag{31}$$

Der erste Fall entspricht einem (für den Spieler) *vorteilhaften*, der zweite einem *fairen*, der dritte einem *nachteiligen* Spiel. Dies führt auf folgende

Definition 4.1 *$\mathfrak{Z} = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\mathfrak{X} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien Folgen reeller ZGen, Z_0 und X_0 konstant, und für jedes n sei*

$$(X_1, \ldots, X_n) = g_n(Z_1, \ldots, Z_n). \tag{32}$$

$\mathfrak{X}$ heißt Martingal bezüglich $\mathfrak{Z}$, wenn

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | Z_1, \ldots, Z_n) = X_n \quad f.s. \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{33}$$

gilt. Steht in (33) anstatt des Gleichheitszeichens „$\geq$“ bzw. „$\leq$“, so heißt $\mathfrak{X}$ ein Submartingal *bzw. ein* Supermartingal *bezüglich $\mathfrak{Z}$.*

(32) bedeutet, daß $(Z_1, \ldots, Z_n)$ mindestens ebensoviel Information wie $(X_1, \ldots, X_n)$ enthält.

Beispiel 4.2 *Ist X eine integrierbare ZG und*

$$X_n := \mathbb{E}(X | Z_1, \ldots, Z_n), \tag{34}$$

so bildet diese Folge ein Martingal bezüglich $\mathfrak{Z}$.

[8] Künftig lasse ich den Zusatz „f.s.“ fort, außer er ist entscheidend.

Beispiel 4.3

Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge von unabhängigen ZGen,* $Y_n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}, Y_0 := 1, X_n := \prod_{k=0}^{n} Y_k. \tag{35}$$

Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein Martingal.*

Dieses Martingal kommt in Zusammenhang mit Geburts- und Todesprozessen vor, vgl. [16] - angesichts der katastrophalen Bevölkerungsentwicklung in den modernen Gesellschaften der westlichen Wertegemeinschaft *die* Zukunftsfrage.

Gilt $Z_n = X_n \;\;\forall n \in \mathbb{N}$, so läßt man den Zusatz „bezüglich $\mathfrak{Z}$" gewöhnlich weg und spricht auch von *kanonischem Martingal* usw. - Obige Definitionen lassen sich wortwörtlich mit $\{0, 1, \ldots, N\}$ und anderen totalgeordneten Indexmengen anstelle von $\mathbb{N}_0$ geben.

Folgerung 4.1 *1.* (X_n) *ist Martingal* $\Longleftrightarrow$ (X_n) *ist Super- und Submartingal.*

2. (X_n) *ist Submartingal* $\Longleftrightarrow$ $(-X_n)$ *ist Supermartingal.*

3. (X_n) *ist (Sub-, Super-)Martingal* $\Longrightarrow$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) \; (\geq, \leq) = \mathbb{E}(X_n) \;\; \forall n \tag{36}$$

Definition 4.2 $\mathfrak{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $\mathfrak{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *seien Folgen reeller ZGen,* V_1 *und* Z_0 *seien konstant.* $\mathfrak{V}$ *heißt* $\mathfrak{Z}$*-vorhersehbar, wenn gilt:*

$$V_n = h_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \;\forall n \geq 1 \tag{37}$$

$(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ beschreibt die *„n-Vergangenheit"* des Prozesses $\mathfrak{Z}$; Ereignisse, die nur von $(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ abhängen, machen zum Zeitpunkt n nur von der Information aus der Vergangenheit Gebrauch.

Beispiel 4.4 *Für eine Spielfolge bezeichne* $\mathfrak{Z} = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Folge der Spielgewinne mit jeweiligem Einsatz 1 und* $Z_0 := 0$.

Setzt ein Spieler beim n-ten Spiel den Einsatz $V_n = h_n(Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ *(für* $n \geq 2$*), der nur vom bisherigen Spielverlauf abhängt, und* $V_1 = v$ $(v \geq 0)$, *so folgt für den Gesamtgewinn* X_n *zum Zeitpunkt* n*:*

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} V_k \cdot (Z_k - Z_{k-1}). \tag{38}$$

Für jede vorhersehbare Folge $\mathfrak{V}$ heißt $\mathfrak{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (wie in (38) definiert mit $X_0 := 0$) *Martingaltransformation von* $\mathfrak{Z}$ *bezüglich* $\mathfrak{V}$ oder *stochastisches Integral von* $\mathfrak{V}$ *bezüglich* $\mathfrak{Z}$ und wird $\mathfrak{X} := \mathfrak{V} \bullet \mathfrak{Z}$ bezeichnet. Dafür gilt der folgende wichtige

Satz 4.1 *1.* $\mathfrak{V}$ *sei ein nichtnegativer, beschränkter, vorhersehbarer Prozeß* ($0 \le V_n \le c < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$), $\mathfrak{Z}$ *ein Supermartingal (bezüglich* $\mathfrak{Z}$*). Dann bildet* $\mathfrak{X} = \mathfrak{V} \bullet \mathfrak{Z}$ *auch ein Supermartingal (mit* $X_0 = 0$*).*

2. $\mathfrak{V}$ *sei ein nichtnegativer, beschränkter, vorhersehbarer Prozeß und* $\mathfrak{Z}$ *ein Martingal. Dann ist* $\mathfrak{X} = \mathfrak{V} \bullet \mathfrak{Z}$ *ein Martingal mit* $X_0 = 0$.

Beweis:

$$\mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | Z_1, \dots, Z_{n-1}) = \mathbb{E}(V_n \cdot (Z_n - Z_{n-1}) | Z_1, \dots, Z_{n-1}) =$$

$= V_n \cdot \left[\mathbb{E}(Z_n | Z_1, \dots, Z_{n-1}) - Z_{n-1}\right] \le 0$, falls $\mathfrak{Z}$ ein Supermartingal und $= 0$, falls $\mathfrak{V}$ ein Martingal ist. Q.E.D.

Wird bei einer Irrfahrt (6)

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\mathbb{E}(Y_n) = 0$ für jedes n vorausgesetzt, so bildet (Z_n) ein Martingal und es gilt $\mathbb{E}(Z_n) = 0 \; \forall n$. Für den Prozeß (38) gilt ebenso $\mathbb{E}(X_n) = 0 \; \forall n$; weil die Folge $\mathfrak{V}$ die Spielstrategie völlig beschreibt, bedeutet dies, daß unabhängig von ihrer Wahl die neue Spielfolge fair bleibt - allerdings immer unter der Voraussetzung der Einsatzbeschränkung

$$V_n \le c < \infty. \tag{39}$$

Gerade diese Bedingung ist bei der Verdoppelungsstrategie in Kap. 1 *nicht* erfüllt! *Wird hingegen* (39) *vorausgesetzt, so läßt sich die Gewinnerwartung nicht verbessern.* Weil Supermartingale unvorteilhafte Spiele beschreiben, gilt das erst recht für diese.

5 Stoppzeiten

Es sei $\mathfrak{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, X_0 konstant, eine Folge von ZGen.

Definition 5.1 *Eine ZG T mit Werten in $\mathbb{N}_\infty$ heißt ($\mathfrak{X}$-)Stoppzeit, wenn gilt:*

$$[T \le n] \text{ hängt nur von } X_1, \dots, X_n \text{ ab } \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{40}$$

Beispiel 5.1 *1. $T = n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$, fest) ist Stoppzeit.*

2. (5), (10) und (11) sind Stoppzeiten.

3. Sind T_1, T_2 Stoppzeiten, dann ist auch $T_1 \wedge T_2 := \min(T_1, T_2)$ Stoppzeit.

4. Ist T Stoppzeit und $n_0 \in \mathbb{N}$, dann ist $T + n_0$ Stoppzeit.

5. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}$ gegeben und

$$T_A := \begin{cases} \infty & \text{falls } X_n \notin A \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \min\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A\} & \text{andernfalls} \end{cases} \tag{41}$$

T_A heißt Eintrittszeit in die Menge A. (5), (10) *und*(11) *sind Sonderfälle von* (41).

Bemerkung : Bedingung (40) besagt, daß für das Beenden eines Prozesses zum zufälligen Zeitpunkt T keine Information aus der Zukunft benützt wird.

Satz 5.1 *$\mathfrak{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein ($\mathfrak{X}$- Super-, Sub-) Martingal, $T_1 \le T_2 \le \dots \le T_N$ seien beschränkte Stoppzeiten, das heißt:*

$$\exists\, c \in \mathbb{N} : T_N \le c < \infty \quad f.s. \tag{42}$$

Dann ist

$$(X_{T_j})_{j=1,\dots,N} \tag{43}$$

ein ($\mathfrak{X}$ - Super-, Sub-) Martingal.

Zu (43): In Kapitel 4 habe ich erwähnt, daß sich Martingale usw. auch für *endliche* Indexmengen definieren lassen.

Der Übergang von $\mathfrak{X}$ zu (43) heißt *optionale Auswahl.*

Folgerung 5.1 *1. Ist $\mathfrak{X}$ ein (Super-, Sub-) Martingal, so hat*

$$(X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0} \tag{44}$$

die gleiche Eigenschaft.

2. Bei der optionalen Auswahl (42) *ergibt sich:*

$$\mathbb{E}(X_1) \geq \mathbb{E}(X_{T_1}) \geq \mathbb{E}(X_{T_2}) \geq \ldots \geq \mathbb{E}(X_{T_N}) \geq \mathbb{E}(X_c) \tag{45}$$

für den Fall eines Supermartingales. Für Submartingale bzw. Martingale steht in (45) *„$\leq$" bzw. „$=$".*

Bemerkung : (44) und die analoge Aussage für Martingale besagen, daß sich durch einen geschickten Abbruch des Spieles nichts an der Martingaleigenschaft ändert. Dieser Sachverhalt steht in völliger Übereinstimmung mit Satz 4.1!

Ein nützlicher und nicht überraschender Satz ist die folgende *Wald'sche Gleichung*:

Satz 5.2 *$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien unabhängige, integrierbare ZGen, die alle die gleiche Verteilung besitzen, $X_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ die zugehörige Irrfahrt (vgl.* (6)*), T eine integrierbare Stoppzeit. Dann ist auch X_T integrierbar und es gilt*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(T) \cdot \mathbb{E}(Y_1). \tag{46}$$

6 Eintrittszeiten bei Irrfahrten

Gegeben seien die Voraussetzungen von Beispiel 2.1, und T sei wie in (11) definiert. Hier deute ich die Lösung des in Kap. 2 angesprochenen Problems des ersten Eintritts des Spieles in die Gewinnzone an. Weitergehende Untersuchungen, die bisweilen bis an die Front der heutigen Forschung reichen, würden den Rahmen dieses kurzen Überblicks weit überschreiten.

Zunächst zur Formel (12): Nach Definition von T ((11)) gilt $X_T = 1$; ferner ist

$$\mathbb{E}(Y_1) = 0.$$

Wäre nun $\mathbb{E}(T) < \infty$, so folgte nach der Wald'schen Gleichung (46):

$$\mathbb{E}(X_T) = 1 \neq 0 = \mathbb{E}(Y_1) \cdot \mathbb{E}(T).$$

Dieser Widerspruch zieht $\mathbb{E}(T) = \infty$ nach sich.

Nun zur Berechnung der Verteilung von T! Es bezeichne

$$c(t) := \mathbb{E}(e^{tY_1}) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq 1 \tag{47}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\big((c(t))^{-1} e^{tY_1}\big) = 1 \quad \forall\, t > 0$$

$$\Longrightarrow \quad Z_n^{(t)} := (c(t))^{-n} \cdot e^{tX_n} \text{ bildet nach Beispiel 4.3 ein Martingal}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}Z_n^{(t)} = 1$$

Dabei definiert man natürlich zusätzlich $Z_0^{(t)} := 1$. Weil $n \wedge T$ eine beschränkte Stoppzeit ist, ergibt sich aus Folgerung 5.1:

$$\mathbb{E}Z_{n\wedge T}^{(t)} = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Es ist klar, daß $\lim_{n\to\infty} Z_{n\wedge T}^{(t)} = Z_T^{(t)}$ gilt, und weil $Z_{n\wedge T}^{(t)} \leq e^t$ ist, folgt (nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz, s. z.B. [3], [1], [15])

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}Z_{n\wedge T}^{(t)} = \mathbb{E}(Z_T^{(t)}) = \mathbb{E}(Z_0^{(t)}), \tag{48}$$

weil $\mathfrak{Z}$ ein Martingal ist und wegen Folgerung 5.1.

Falls $T < \infty$, folgt

$$\frac{e^{tX_T}}{(c(t))^T} = \frac{e^t}{(c(t))^T},$$

daher wegen (48):

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{(c(t))^T}\Big) = e^{-t}. \tag{49}$$

Nun hat die Gleichung

$$(c(t))^{-1} = u \quad 0 < u \leq 1 \tag{50}$$

die Lösung

$$e^{-t} = \frac{1}{u} - \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1};$$

(50) in (49) eingesetzt ergibt daher

$$\mathbb{E}(u^T) = \frac{1}{u} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - u^2}\right) \quad \text{für} \quad 0 < u \leq 1 \tag{51}$$

Einerseits gilt

$$\mathbb{E}(u^T) = \sum_{n=1}^{\infty} u^n \, W[T = n], \tag{52}$$

andererseits läßt sich die rechte Seite von (51) wie folgt in eine Potenzreihe entwickeln:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

mit $\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ und $\binom{\alpha}{0} := 1$, daher

$$\frac{1}{u} \cdot (1 - \sqrt{1 - u^2}) = \frac{1}{u} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n \cdot u^{2n}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot u^{2n-1} \tag{53}$$

Ein Koeffizientenvergleich von (52) und (53) liefert

$$\left.\begin{array}{l} W([T = 2n - 1]) = \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^{n+1} \\ W([T = 2n]) = 0 \end{array}\right\} \forall n \geq 1.$$

7 Bezüge zum Mathematikunterricht

Dieser kurze Überblick kann nur einige einfache Probleme darlegen und Lösungen andeuten; er soll vor allem Anregungen für ein weitergehendes Studium der neueren Entwicklungen der Wahrscheinlichkeitstheorie geben, welches das nötige Hintergrundwissen für einen fruchtbaren, aktuellen und lebendigen Unterricht liefert, gehört doch die Wahrscheinlichkeitstheorie zu denjenigen Gebieten der Mathematik, die sich in einer besonders stürmischen Entwicklung befinden; auch erweist sie sich in allen Natur-, aber auch in vielen anderen Wissenschaften als unentbehrlich.

Die zahlreichen begrifflichen und technischen Schwierigkeiten der Wahrscheinlichkeitstheorie machen sich auch im Unterricht an höheren Schulen bemerkbar, ein Umstand, dem nur durch entsprechendes Wissen, das weit über das übliche Schulbuchwissen hinausgeht, sowie geschickte didaktische Umsetzung beizukommen ist. Andererseits lassen sich gerade hier viele anregende und praxisnahe Fragestellungen behandeln, die sich relativ einfach formulieren lassen; manchmal sind auch, wie hier dargelegt, einfache Antworten möglich, wenngleich die Lösungen die Möglichkeiten des Mathematikunterrichtes weit überschreiten. Die Ungunst, in der die Mathematik in der Ministerialbürokratie (Stichwort: Stundenkürzungen) und der journalistischen Öffentlichkeit steht, engen die Entfaltung eines wirksamen Mathematikunterrichtes gegenwärtig weiter ein [9]; vielleicht vermögen unbedankte Eigeninitiative unserer Lehrer und optimistische Hoffnung auf zukünftiges, radikales Umdenken die Talsohle durchschreiten helfen.

Als gute, nicht übermäßig formale Lehrbücher sind [8], [5], [14] oder [10] zu nennen (besonders [10] enthält eine Reihe sehr interessanter, nichttrivialer Anwendungen), eine stärkere Betonung der Martingaltheorie findet sich bei [6] und vor allem [16]. Auf maßtheoretischer Grundlage entwickeln etwa [7], [15] oder [2] die Theorie; [2] setzt gründliche maßtheoretische Kenntnisse voraus, wie sie etwa in [1] oder [3] ausgezeichnet vermittelt werden. Das sehr reichhaltige, klassische Standardwerk [4] baut zwar nicht auf maßtheoretischer Grundlage auf, ist dennoch nicht einfach lesbar, jedoch besonders vielseitig. Eine elementare Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse (einschließlich Martingale) bietet z.B. [13], speziell den Martingalen sind die anspruchsvollen Werke [9], das es auch in englischer Übersetzung gibt, und [12] gewidmet.

Literatur

[1] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie.* 2. Aufl., W. de Gruyter, Berlin, 1992.

[2] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* 4.Aufl., W. de Gruyter, Berlin, 1991.

[3] Elstrod, J.: *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[9] Das zu gegebenem Anlaß abgegebene höchstministerielle Bekenntnis, die Mathematik habe zu ihren Lieblingsfächern gehört, ändert nichts an den *realen Tatsachen* der Lehrplangestaltung.

[4] Feller, W.: *An Introduction to Probability Theory.* Vol. I and II. J.Wiley, New York, 1968.

[5] Foata, D.; Fuchs, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Birkhäuser, 1999.

[6] Gut, A.: *An Intermediate Course in Probability.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[7] Gänssler, P.; Stute, W.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer-Verlag, 1977.

[8] Gnedenko, B.W.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie.* Akademie-Verlag, Berlin, 1991.

[9] Neveu, J.: *Martingales à temps discret.* Masson & Cie, Paris, 1972.

[10] Pfanzagl, J.: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.* W. de Gruyter, Berlin, 1990.

[11] Reichel, H.-Ch.; Hanisch, G.; Müller, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.* Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1987.

[12] Rogers, L.C.G.; Williams, D.: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Vol. 1 and 2, Second Edition, Cambridge University Press, 1994.

[13] Ross, S.M.: *Stochastic Processes.* Second Edition. J.Wiley, New York, 1996.

[14] Rényi, A.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1966.

[15] Schürger, K.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Oldenbourg, 1998.

[16] Williams, D.: *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Anschrift des Verfassers:

Univ.-Prof. Dr. Wolfgang WERTZ
Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
TU Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10/E107
A-1040 WIEN